통계학

– 제 4 장 이항분포와 그에 관련된 분포들

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

베르누이 시행과 이항분포

- 베르누이 시행 (Bernoulli trial)
  - 베르누이 시행의 조건
    - 각 시행은 성공(S : success), 실패(F : failure) 두 결과만 가짐
    - 각 시행에서
      성공할 확률은 $P(S) = p$
      실패할 확률은 $P(F) = 1 - p$ 로 일정
    - 각 시행은 서로 독립으로
      각 시행의 결과가 다른 시행의 결과에 영향을 미치지 않음
  - 예 – [베르누이 시행 여부 판정]
    - 공정한 주사위를 던지고, 나온 눈을 기록
    - 공정한 주사위를 던지고, 나온 눈이 5인가를 기록
    - 두 개의 공정한 주사위를 던지고, 나온 눈의 합이 7인가를 기록
    - 납을 박은 부정 주사위를 던지고, 나온 눈이 5인가를 기록

- 이항분포 (binomial distribution)
  - 이항분포의 정의
    - 각 시행에서 성공할 확률이 p인 베르누이 시행을 n번 반복할 때에 일어나는 성공의 횟수에 관한 확률분포
      - n : 베르누이 시행의 반복 횟수
      - p : 각 시행에서 성공할 확률
      - X : n번 시행 중 성공의 횟수
      - $P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$
      - 확률변수 X는 이항분포를 따름

$$X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$$

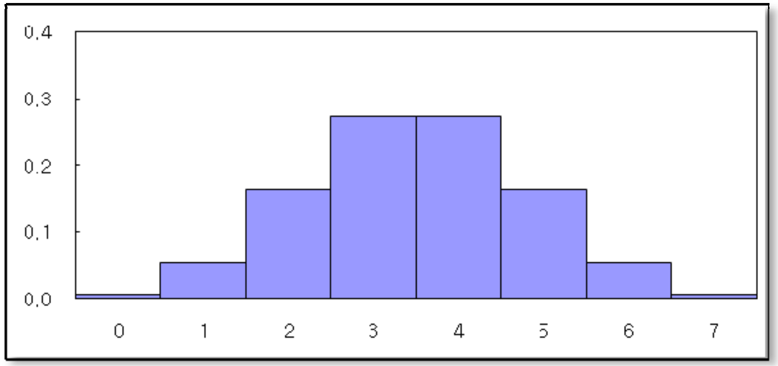
- 예 – [동전 던지기]
  - 공정한 동전을 7번 던질 때, 앞면이 적어도 4번은 나올 확률은?
    - $n = 7$(번)
    - 매 시행마다 앞면이 나올 확률 : $p = 0.5$
    - 확률변수 X : 동전을 7번 던질 때 앞면이 나오는 횟수

$$X \sim \mathrm{Bin}(7, 0.5)$$

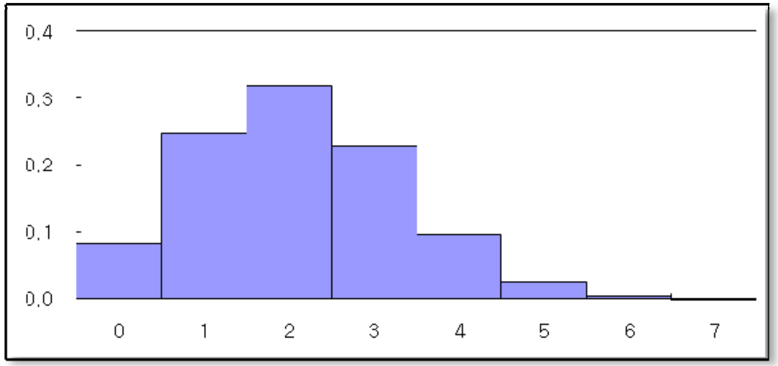
    - 앞면이 적어도 4번은 나올 확률 :

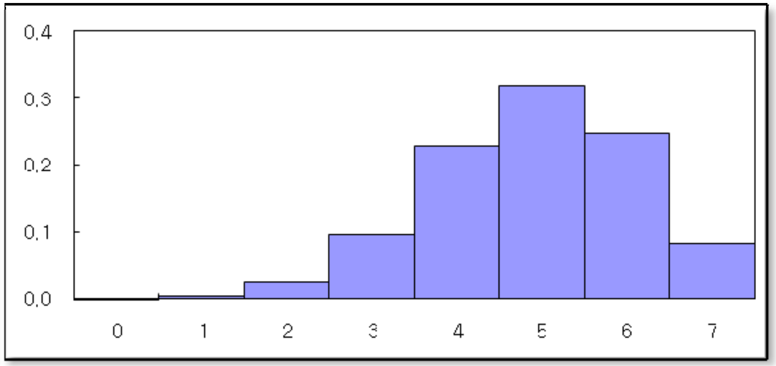
$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

- $X \sim \text{Bin}(7, 0.5)$ 의 확률분포



- $X \sim \text{Bin}(7, 0.3)$ 와 $X \sim \text{Bin}(7, 0.7)$ 의 확률분포





- 성공의 확률과 이항분포의 모양
  - $p = 0.5$이면 이항확률분포는 대칭
  - $p < 0.5$이면 이항확률분포는 왼쪽으로 치우치고 오른쪽으로 긴 꼬리
  - $p > 0.5$이면 이항확률분포는 오른쪽으로 치우치고 왼쪽으로 긴 꼬리

- 이항분포의 기대값과 분산
  - 기대값 : $E[X] = np$
  - 분　산 : $Var[X] = np(1-p)$

- 예 – [동전 던지기]
  - 공정한 동전을 7번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수에 대한 기대값?
    - $E[X] = np = 7 \times 0.5 = 3.5$

초기하분포

- 초기하분포(hypergeometric distribution)
  - 추출법
    - 복원추출
      - 한 번 추출된 개체가 다시 추출될 수 있음
      - 모든 개체가 추출될 확률이 같음
    - 비복원추출
      - 한 번 추출된 개체는 다시 추출될 수 없음
      - 추출 순서에 따라 개체가 추출될 확률이 다름

- 초기하분포의 정의
  - N 개의 유한한 모집단의 구성원소가 A , B 의 두 범주로 분류될 때,
    비복원추출에 의해 구성된 표본 중에서
    A 범주에 속하는 구성원소의 수에 관한 확률분포

    - N : 모집단의 크기
    - D : 모집단 내에서 범주 A 에 속하는 구성원소의 수
    - n : 표본의 크기
    - X : n 개의 표본 중에서 범주 A 에 속하는 구성원소의 수
    - $P(X=x)=\dfrac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $\qquad x=0,\ 1,\ \cdots,\ n$

- 초기하분포의 기대값
  - 기대값 : $E[X] = n \times \dfrac{D}{N}$
- 예 – [주머니에서 공 꺼내기]
  - 검은 공 6개와 하얀 공 4개가 든 주머니
  - 주머니에서 3개의 공을 꺼냈을 때, 하얀 공이 2개일 확률?
    - $N = 10\ ,\ D = 4\ ,\ n = 3$
    - $P(X = 2) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{10-4}{3-2}}{\binom{10}{3}}$