통계학

– 제 8 장 통계적 추론 (2)

가설검정 (hypothesis testing)

- 가설검정
  - 가설검정의 의미
    - 표본 자료의 정보를 통해 미지인 모수의 참값에 대한 특정 가설이 적합한 지 적합하지 않은 지를 판별하는 것
  - 통계적 가설(statistical hypothesis)
    - 모집단의 특성인 모수에 관한 주장이나 서술
  - 통계적 가설의 종류
    - 대립가설 (alternative hypothesis, H_1)
      - 입증하여 주장하고자 하는 가설
    - 귀무가설 (null hypothesis, H_0)
      - 대립가설의 반대 가설
      - 대립가설을 입증할 수 없을 때 무효화시키면서 받아들이는 가설

- 예 – [통계적 가설]
  - 소비자 고발센터에 접수된 불만 :
    치약의 함량이 기준치인 150g을 미달함
    - 귀무가설(H_0) : 치약의 함량 기준치는 150g이다.
    - 대립가설(H_1) : 치약의 함량 기준치는 150g에 미달한다.
  - 휴대폰을 만드는 회사
    휴대폰의 색상에 따라 남성과 여성의 선호도가 같은지 알아봄
    - 귀무가설(H_0) : 휴대폰의 색상에 따라 남녀의 선호도는 같다
    - 대립가설(H_1) : 휴대폰의 색상에 따라 남녀의 선호도는 다르다

- 가설검정과 관련된 용어들
  - 검정의 결론과 오류의 종류

검정의 결론 / 실제의 상태	귀무가설 채택	귀무가설 기각
귀무가설이 맞음	옳은 결론	잘못된 결론 (제1종 오류)
귀무가설이 틀림	잘못된 결론 (제2종 오류)	옳은 결론

- 제1종 오류 : 귀무가설이 맞는 데 귀무가설을 기각하는 오류
- 제2종 오류 : 귀무가설이 틀리는데 귀무가설을 채택하는 오류
- 일반적으로 제1종 오류가 제2종 오류보다 심각함
- 가설검정을 수행할 때
  두 가지 오류를 범할 확률을 되도록 작게 하는 것이 바람직함

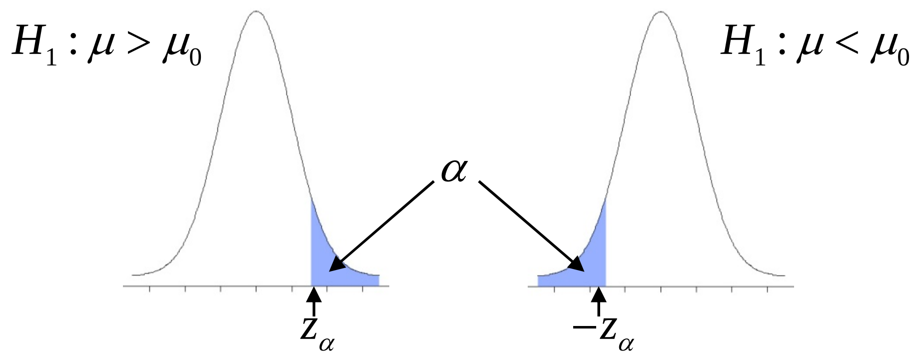
- 유의수준 (significance level, α)
  - 제1종 오류를 범할 확률의 최대 허용한계
  - 귀무가설의 채택 여부를 결정하는 기준
  - 귀무가설 채택의 의미
    - 현재 표본으로부터 얻어진 정보로는 대립가설이 사실임을 입증할 만한 충분한 증거가 없음을 의미
- 검정통계량 (test statistic)
  - 통계적 가설검정에 사용되어지는 통계량
  - 어떤 분석을 하느냐에 따라 사용되어지는 검정통계량은 다름
- 기각역 (critical region)
  - 검정통계량이 가질 수 있는 값의 영역 중에서 귀무가설을 기각하게 되는 영역
- 유의확률 ($p-$ value, significant probability)
  - 주어진 검정통계량의 관측치로부터 귀무가설을 기각하게 하는 최소의 유의수준

- 가설검정의 절차
  - 귀무가설과 대립가설의 설정
    - 단측검정/양측검정 여부 확인
  - 유의수준의 설정
  - 검정통계량의 결정 및 분포 확인
  - 기각역 및 유의확률의 계산
  - 분석과 의사결정
    - 귀무가설 기각
      - 모수의 추정량이 기각역에 포함되는 경우
      - 유의확률 < 유의수준
    - 귀무가설 채택
      - 모수의 추정량이 기각역에 포함되지 않는 경우
      - 유의확률 > 유의수준

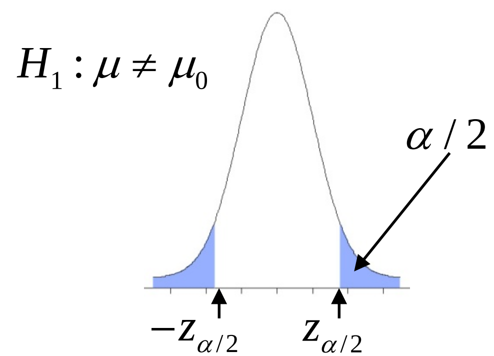
모평균에 대한 추론

- 모평균에 대한 가설검정(I)
  - 표본의 크기가 큰 경우
    - 귀무가설과 대립가설의 설정
      - 귀무가설 (H_0) : $\mu = \mu_0$
      - 대립가설 (H_1)
        단측검정 : $\mu > \mu_0$ 또는 $\mu < \mu_0$
        양측검정 : $\mu \neq \mu_0$
    - 유의수준의 설정
      - 일반적으로 유의수준은 10%, 5%, 1% 중 하나를 택함
    - 검정통계량의 결정 및 분포 확인
      - $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

- 기각역 및 유의확률의 계산
  - 단측 검정인 경우



  - 양측 검정인 경우



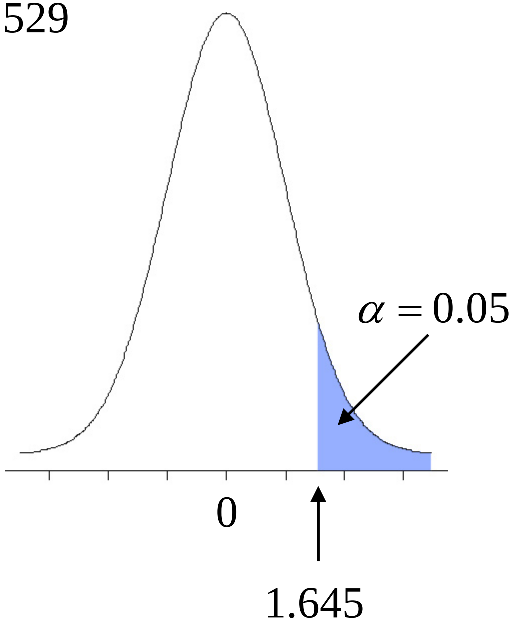
- 예 – [새로운 치료법]
  - 새로운 치료법이 개발되어
    말기 암환자의 생명 연장에 기존 치료보다 더 효과적이라 주장
  - 기존의 치료는 오랜 기간 동안 사용되어 왔으며
    의학잡지의 기록에 의해 평균 생존기간이 4.2년으로 알려져 있음
  - 새로운 치료법을 81명 환자들에게 시행하여 생존기간을 기록
  - 표본평균 : 4.5년, 표본표준편차 : 1.8년
  - 새로운 치료법이 기존 치료보다 더 효과적이라는 주장이 옳은지
    유의수준 5%에서 검정하라.

- 예 – [새로운 치료법]
  - 귀무가설과 대립가설의 설정
    - 귀무가설 (H_0) : $\mu = 4.2$
      암환자의 생명 연장에 기존 치료와 새로운 치료법은 동일 효과
    - 대립가설 (H_1) : $\mu > 4.2$
      암환자의 생명 연장에 기존 치료보다 새로운 치료법이 효과적
    - 단측검정
  - 유의수준의 설정 : $\alpha = 0.05$
  - 검정통계량의 결정 및 분포 확인 :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \doteq \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} = \frac{4.5 - 4.2}{1.8 / \sqrt{81}} = 1.5$$

- 예 – [새로운 치료법]
  - 기각역의 계산
    - $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$
    - 검정통계량이 1.645보다 크면 귀무가설을 기각 가능
    - $\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4.2 + 1.645 \times \frac{1.8}{\sqrt{81}} = 4.529$
    - 표본평균이 4.529보다 크면 귀무가설을 기각 가능
  - 유의확률의 계산
    - $P(Z > 1.5) = 0.0668$
    - 유의확률이 유의수준보다 작으면 귀무가설을 기각 가능

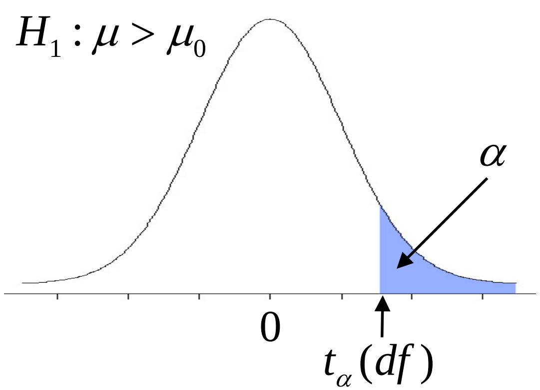


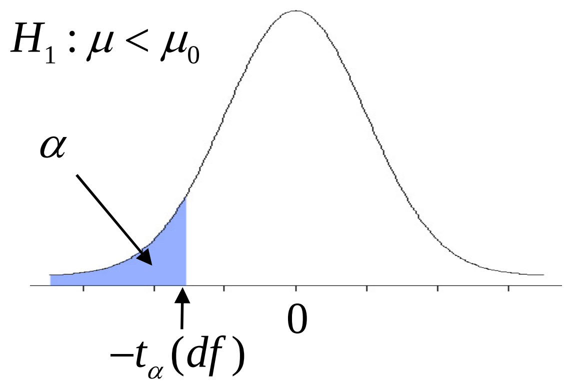
- 모평균에 대한 가설검정(II)
  - 표본의 크기가 작은 경우
    - 귀무가설과 대립가설의 설정
      - 귀무가설 (H_0) : $\mu = \mu_0$
      - 대립가설 (H_1)

        단측검정 : $\mu > \mu_0$ 또는 $\mu < \mu_0$

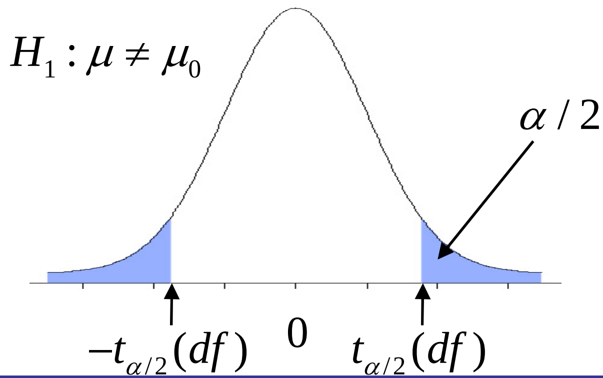
        양측검정 : $\mu \neq \mu_0$
    - 유의수준의 설정
    - 검정통계량의 결정 및 분포 확인
      - $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(df)$

- 기각역의 계산 (유의확률은 쉽게 계산할 수 없음)
  - 단측 검정인 경우





  - 양측 검정인 경우



- 예 – [소비자 만족도 지수]
  - S회사가 개발한 신제품을 사용하는 25명의 소비자 대상
  - 소비자 만족도 조사 결과
    - 표본평균 : $\bar{x} = 72.32$
    - 표본표준편차 : $s^2 = 11.60$
  - S회사는 신제품의 소비자 만족도 평균이 70점 이상이라 생각함
  - 유의수준 5%에서 검정

  - 귀무가설과 대립가설의 설정
    - 귀무가설 (H_0) : $\mu = 70$
      신제품의 소비자 만족도 평균은 70점이다
    - 대립가설 (H_1) : $\mu > 70$
      신제품의 소비자 만족도 평균은 70점 이상이다
    - 단측검정
  - 유의수준의 설정 : $\alpha = 0.05$

- 예 – [소비자 만족도 지수]
  - 정규분포 가정 하에서의 검정통계량 결정
    - $$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{72.32 - 70}{11.60 / \sqrt{25}} = 1.00$$
  - 기각역의 계산
    - $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$
    - 검정통계량이 1.645보다 크면 귀무가설 기각 가능
    - $$\bar{X} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 70 + 1.645 \times \frac{11.60}{\sqrt{25}} = 73.8164$$
    - 표본평균이 73.8164보다 크면 귀무가설 기각 가능

- 예 – [소비자 만족도 지수]
  - t-분포 하에서의 검정 통계량 결정
    - $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{72.32 - 70}{11.60 / \sqrt{25}} = 1.00$
  - 기각역의 계산
    - $t_\alpha = t_{0.05}(24) = 1.711$
    - 검정통계량이 1.645보다 크면 귀무가설 기각 가능
    - $\bar{X} > \mu_0 + t_\alpha(24)\dfrac{S}{\sqrt{n}} = 70 + 1.711 \times \dfrac{11.60}{\sqrt{25}} = 73.9695$
    - 표본평균이 73.9695보다 크면 귀무가설 기각 가능

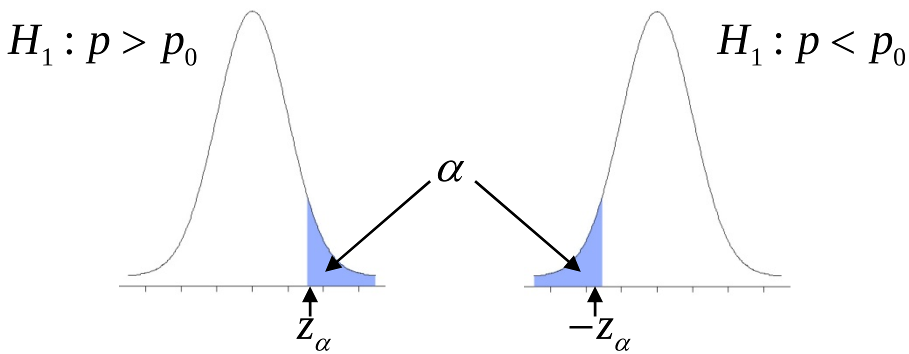
모비율에 대한 추론

- 모비율에 대한 가설검정
  - 표본의 크기가 큰 경우
    - 귀무가설과 대립가설의 설정
      - 귀무가설 (H_0) : $p = p_0$
      - 대립가설 (H_1)

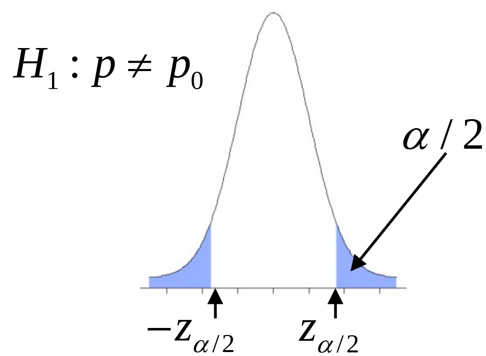
        단측검정 : $p > p_0$ 또는 $p < p_0$

        양측검정 : $p \neq p_0$
    - 유의수준의 설정
    - 검정통계량의 결정 및 분포 확인
      - $$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

- 기각역 및 유의확률의 계산
  - 단측 검정인 경우



  - 양측 검정인 경우



- 예 – [특정 암의 완치율]
  - 특정한 암의 경우 수술을 시행한 후 완치되는 비율이 30%
  - 이 암에 걸린 환자 60명을 대상으로
    수술 뿐만 아니라 수술 전후에 일정기간 방사선치료를 병행 결과
    60명 중에서 27명이 완치되었음
  - 수술만 하는 것보다 방사선치료를 병행하는 것이
    암의 완치율을 높이는데 효과가 있다고 할 수 있는가?
  - 유의수준 5%에서 검정

  - 귀무가설과 대립가설의 설정
    - 귀무가설(H_0) : 방사선치료를 병행하더라도 완치율은 30% 이다.
      $p = 0.3$
    - 대립가설(H_1) : 방사선치료를 병행하면 완치율이 30%이상이다.
      $p > 0.3$
    - 단측검정

- 예 – [특정 암의 완치율]
  - 유의수준의 설정 : $\alpha = 0.05$
  - 검정통계량의 결정 및 분포 확인 :
    - $$Z = \frac{\hat{p} - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{60}}} \sim N(0,1)$$
    - $\hat{p} = 27 / 60 = 0.45$
    - $$Z = \frac{0.45 - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{60}}} = 2.54$$

- 예 – [새로운 치료법]
  - 기각역의 계산
    - $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$
    - 검정통계량이 1.645보다 크면 귀무가설을 기각 가능
    - $\hat{p} > 0.3 + 1.645 \times \sqrt{\frac{0.3 \times 0.7}{60}} = 0.3973$
    - 표본평균이 0.3973보다 크면 귀무가설을 기각 가능
  - 유의확률의 계산
    - $P(Z > 2.54) = 0.0055$
    - 유의확률이 유의수준보다 작으면 귀무가설을 기각 가능